

Über die Stabilität des Stoßwellentypus aus der Klasse der Homologie-Lösungen

Von WOLF HÄFELE

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforschg. **10a**, 1017—1027 [1955]; eingegangen am 18. Oktober 1955)

In einer früheren Arbeit¹ wurde ein Stoßwellentypus aus der Klasse der Homologie-Lösungen angegeben. In dieser Arbeit nun wird auf analytischem Wege untersucht, inwieweit Stoßwellen, die noch nicht vom Homologie-Typus sind, mit wachsender Zeit diesen Typus annehmen.

Die Stabilitätsüberlegung schließt an das Phänomen der Umkehrkanten an und wirft insofern auf diese ein neues Licht.

Die Kenntnis der ersten Arbeit über Homologie-Lösungen wird vorausgesetzt.

In einer vorangegangenen Arbeit¹ wurde die Klasse der Homologie-Lösungen, die von v. Weizsäcker² im Zusammenhang mit einem astrophysikalischen Problem betrachtet worden war, eingehend studiert, und es wurde festgestellt, daß es eine einzige Homologie-Lösung gibt, die eine ebene, starke, sich selbst überlassene Stoßwelle darzustellen imstande ist. Der Ausdruck „sich selbst überlassene Stoßwelle“ soll bedeuten, daß die Stoßwelle frei von Energie und Impulsnachschub sein soll. Die verschiedenen Homologie-Lösungen wurden durch einen Separationsparameter n gekennzeichnet, und der die ausgezeichnete Lösung bestimmende Parameter wurde n_0 genannt.

In der Arbeit von Hain und v. Hoerner³ war auf dem Wege der rein numerischen Integration der hydrodynamischen Grundgleichungen festgestellt worden, daß Stoßwellen mit den verschiedensten Anfangsverteilungen mehr und mehr bei wachsender Zeit sich der Homologie-Lösung $n = n_0$ anschmiegen. Dieses Verhalten analytisch zu verstehen, ist der Sinn dieser Arbeit. Meyer⁴ untersucht dieselbe Frage auf völlig andere als die hier vorliegende Art und Weise, indem er die interessierenden Größen nach Potenzen des Abstandes von der Front entwickelt. Aus der Annahme, daß gewisse höhere Entwicklungskoeffizienten klein bleiben, gewinnt er Relationen, die besagen, daß der Strömungstyp mit wachsender Zeit mehr und mehr gegen die Homologie-Lösung $n = n_0$ geht.

Bei den Stabilitätsüberlegungen dieser Arbeit soll an das Phänomen der Umkehrkanten angeknüpft

werden. Umkehrkanten — auch Grenzlinien genannt — sind in den Arbeiten von Tollmien^{5, 6} und Guderley⁷ ausführlich behandelt worden. Sie stellen bei unseren Stoßwellen ein Phänomen des Strömungsgebietes dar, das *hinter* der Front liegt. Wir argumentieren von dort her und können unter gewissen Voraussetzungen zeigen, daß der in Rede stehende Einstellvorgang sich einspielen muß. So sind die in dieser Arbeit dargestellten Überlegungen ein Gegenstück zu der Arbeit von Meyer, der wie gesagt *von der Front her* argumentiert.

Bei der vorliegenden Arbeit wird die Kenntnis der ersten Arbeit des Verfassers¹ vorausgesetzt. Gelegentlich werden wir eine Formel zitieren, die dann dieselbe Nummer haben soll wie in der voranstehenden Arbeit¹, nur daß wir hier ein A voransetzen, also z. B. (A2) statt (2) schreiben werden.

Da wir wesentlich von dem Phänomen der Umkehrkanten Gebrauch machen, wollen wir in dem ersten Kapitel dieses unter bestimmten Gesichtspunkten betrachten.

Indessen wird bei der folgenden Untersuchung wenig gerechnet und viel argumentiert. Deshalb ist es gut, den großen Zusammenhang der Gedankenführung stets im Auge zu behalten:

Zunächst zeigen wir, daß Umkehrkanten, die nicht zu Stößen führen, physikalisch unmöglich sind. Danach gewinnen wir eine an die Homologie-Lösungen adaptierte allgemeine Form des Ansatzes für die Größen u , ϱ und a und damit auch eine entsprechende Form des Grundgleichungssystems. Weiter machen wir uns hier klar, daß Störglieder,

¹ W. Häfele, Z. Naturforschg. **10a**, 1006 [1955], voranstehend.

² C. F. v. Weizsäcker, Z. Naturforschg. **9a**, 269 [1954].

³ K. Hain u. S. v. Hoerner, Z. Naturforschg. **9a**, 993 [1954].

⁴ F. Meyer, Z. Naturforschg. **10a**, 693 [1955].

⁵ W. Tollmien, Z. angew. Math. Mech. **11**, 117 [1937].

⁶ W. Tollmien, Z. angew. Math. Mech. **21**, 140 [1941].

⁷ G. Guderley, Z. angew. Math. Mech. **22**, 121 [1942].



die etwa einer homologen Anfangsverteilung überlagert werden, einen leicht modifizierten Frontverlauf bedingen und solchem modifizierten Frontverlauf zugeordnet werden können – jedenfalls gilt das für den Teil der Anfangsverteilung, der innerhalb des Einflußbereiches der Front liegt. Auf diesen bleibt die gesamte Argumentation beschränkt. In dem Einflußbereich ist es deshalb hinreichend, lediglich modifizierte Frontverläufe zu betrachten und von diesen zu zeigen, daß sie den Typ einer Homologie-Front annehmen.

Zu dem Ende stellen wir fest, daß das für eine Lösung $n = n_0$ charakteristische Abströmen nach hinten schon vorliegen muß, bevor sich eine Lösung einer Homologie-Lösung völlig angeglichen hat. Wir nehmen eine begriffliche Verallgemeinerung der Verhältnisse vor, die im Homologie-Fall durch den Punkt $P_{2,3}$ dargestellt werden, denn dieser vermittelte ja den Übergang zum Abströmvorgang. Zusammen mit der Feststellung der Unmöglichkeit von Umkehrkanten, die nicht zu Stößen führen, ergibt sich damit eine Gleichung, die über den Frontverlauf aussagt, daß er homolog werden muß, womit wir dann am Ziele sind.

I. Umkehrkanten

Innerhalb der Klasse der Homologie-Lösungen waren Umkehrkanten dadurch gekennzeichnet, daß auf ihnen galt:

$$d\nu/d\xi = \infty, \quad d\mu/d\xi = \infty, \quad d\ln \varrho/d\xi = \infty, \quad (1)$$

und eben deswegen waren sie verboten. Beim Homologie-Ansatz (A 18) – (A 21) drückte sich in ξ die Ortsabhängigkeit der Größen u , ϱ und p aus. Wir verlassen den speziellen Homologie-Ansatz, kehren zu den allgemeinen Gln. (A 1) – (A 4) zurück und nehmen eine Koordinatentransformation vor. Statt der Variablen (x, t) führen wir die Variablen (φ, t) ein, wobei gelten soll

$$\varphi = \varphi(x, t); \quad \varphi_x \neq 0; \quad \varphi_t \neq \infty. \quad (2)$$

φ sei eine zunächst beliebige Funktion von x und t , die stetig und hinreichend oft differenzierbar sein soll. Die Größen (1) wurden aus den drei Diff. Gln. der Homologie durch einen Eliminationsprozeß gewonnen, und so wollen wir auch hier die Grundgleichungen (A 1) – (A 4) in der Form angeben, daß wir sie als Gleichungssystem für die Größen $u_\varphi, p_\varphi, \varrho_\varphi$ auffassen. Wir erhalten also mit (2) aus (A 1) – (A 4)

$$\varrho_\varphi (\varphi_t + u \varphi_x) + u_\varphi \varphi_x + p_\varphi \cdot 0 = -\alpha \varrho u/x - \varrho_t, \quad (3)$$

$$\varrho_\varphi \cdot 0 + u_\varphi (\varphi_t + u \varphi_x) + p_\varphi \varphi_x/\varrho = -u_t, \quad (4)$$

$$\varrho_\varphi (-a^2 (\varphi_t + u \varphi_x)) + \mu_\varphi \cdot 0 + p_\varphi (\varphi_t + u \varphi_x) = -p_t + a^2 \varrho_t. \quad (5)$$

Auflösung nach $u_\varphi, \varrho_\varphi, p_\varphi$ ergibt

$$\varrho_\varphi = \frac{-(\varphi_t/\varphi_x + u)^2 - a^2 + \varrho(\varphi_t/\varphi_x + u)(u_t - p_t/\varrho(\varphi_t/\varphi_x + u) - \alpha u(\varphi_t/\varphi_x + u)/x)}{\varphi_x(\varphi_t/\varphi_x + u)((\varphi_t/\varphi_x + u)^2 - a^2)}, \quad (6)$$

$$u_\varphi = \frac{-(\varphi_t/\varphi_x + u) \{ (\varphi_t/\varphi_x + u)(u_t - p_t/\varrho(\varphi_t/\varphi_x + u) - \alpha u a^2/x(\varphi_t/\varphi_x + u)) \}}{\varphi_x(\varphi_t/\varphi_x + u)((\varphi_t/\varphi_x + u)^2 - a^2)}, \quad (7)$$

$$p_\varphi = \frac{(\varphi_t/\varphi_x + u) \varrho a^2 (u_t - p_t(\varphi_t/\varphi_x + u)/\varrho a^2 - \alpha u(\varphi_t/\varphi_x + u)/x)}{\varphi_x(\varphi_t/\varphi_x + u)((\varphi_t/\varphi_x + u)^2 - a^2)}. \quad (8)$$

Wenn wir jetzt die Gln. (6) – (8) diskutieren, denken wir an eine irgendwo realisierte Strömung, die in den Koordinaten (φ, t) beschrieben werden soll. Zuerst wenden wir uns der Determinante des Systems (3) – (5) zu, die in (6) – (8) als Nenner auftritt. Sie heißt:

$$D = \varphi_x(\varphi_t/\varphi_x + u) ((\varphi_t/\varphi_x + u)^2 - a^2). \quad (9)$$

D wird an folgenden Stellen zu Null:

$$\varphi_x = 0, \quad -\varphi_t/\varphi_x = u, \quad -\varphi_t/\varphi_x = u \pm a. \quad (10), (11), (12)$$

Den ersten Fall hatten wir bei der Einführung von φ ausgeschlossen. Die rechten Seiten von (11) und (12) sind die charakteristischen Richtungen des

Grundgleichungssystems (A 1) – (A 4). Die linken Seiten von (11) und (12) sind mit der Geschwindigkeit längs einer Linie $\varphi = \text{const}$ identisch, so daß folgende Feststellung gilt:

Immer dann, wenn die Geschwindigkeit längs einer die Ortsabhängigkeit in sich bergenden Koordinate φ gleich der Geschwindigkeit einer (13) der drei Charakteristiken wird, verschwindet die Determinante des Systems für die Größen $u_\varphi, p_\varphi, \varrho_\varphi$.

Wir haben jetzt 2 Fälle zu unterscheiden: 1. Die Zähler in (6) – (8) verschwinden an den Nullstellen des Nenners; 2. Die Zähler in (6) – (8) verschwinden nicht an den Nullstellen des Nenners.

Den Fall 1 kann man als den Regularitätsfall bezeichnen, denn ist die hypothetisch betrachtete Strömung regulär, d. h. wie wir noch sehen werden, frei von Stoßfronten, so ist dort nirgends

$$u_\varphi = p_\varphi = \varrho_\varphi = \infty,$$

was aber sehr wohl für den Fall 2 zutrifft.

Wir betrachten den Fall 1 an den Nullstellen (12). Die Forderung, daß dort die Zähler verschwinden sollen, führt nicht, wie man zunächst vermuten sollte, auf drei Gleichungen, sondern auf eine einzige, nämlich

$$u_t \pm p_t/\varrho a \pm \alpha u a/x = 0. \quad (14)$$

Aus der allgemeinen Theorie der Gln. (A 1) – (A 4) wissen wir aber, daß in den charakteristischen Richtungen $u \pm a$ die folgende als Hodographengleichung bezeichnete Gleichung gilt:

$$du \pm dp/\varrho a \pm \alpha u a/x \cdot dt = 0,$$

$$\text{d. h. } (u_t \pm p_t/\varrho a \pm \alpha u a/x) dt + (u_\varphi \pm p_\varphi/\varrho a) d\varphi = 0. \quad (15)$$

Wenn aber die Richtung der Linie $\varphi = \text{const}$ mit der Richtung $dx/dt = u \pm a$ übereinstimmt, ist dort $d\varphi = 0$. Also folgt (14) aus (15). Wir haben somit den Zusammenhang zwischen der Richtung einer Charakteristik und der in ihr geltenden Hodographengleichung auf diese Art und Weise noch einmal hergestellt. Noch einen weiteren Zug der allgemeinen Theorie kann man aus den Gln. (6) – (8) herauslesen: Es ist nämlich für $u \pm a$ -Charakteristiken typisch, daß man die Größen u, ϱ, p über sie hinweg notfalls auch mit unstetiger erster Ableitung beliebig fortsetzen kann. Eben das drückt sich bei den Gln. (6) – (8) in der Form 0/0 aus, die wir im Fall 1 an den Nullstellen des Nenners verlangen. Die Un-

bestimmtheit der Form 0/0 gibt die Willkürlichkeit der Fortsetzung frei.

Nicht viel anders verhält es sich mit der Nullstelle (11). Verlangen wir, daß dort die Zähler verschwinden, so führt das auf die beiden Gleichungen

$$p_t - a^2 \varrho_t = 0; \quad (\varphi_t/\varphi_x + u) = 0. \quad (16), (16a)$$

(16) ist aber kraft (8) mit (16a) identisch (im Falle 1), so daß die Forderung

$$\varphi_t/\varphi_x + u = 0$$

bleibt. Diese Gleichung lesen wir im Nenner von (6) – (8) als Angabe über den Ort der Nullstellen, im Zähler lesen wir dieselbe Gleichung als Ausdruck der Tatsache, daß auf den Linien $dx/dt = u$ die Größe φ konstant ist. Die allgemeine Theorie fordert auf den Linien $dx/dt = u$ die Hodographengleichung

$$ds = 0, \quad \text{also } s = \text{const}, \quad (17)$$

dabei bedeutet s die mit c_v dimensionslos gemachte Entropie S .

Diese Bedingung wird aber auch von jeder Funktion $\Phi(s)$ erfüllt, so daß das Φ nun so gewählt werden kann, daß die Beziehung gilt

$$\varphi = \Phi(s). \quad (18)$$

Damit liegt auch hier bei (11) der gleiche Zusammenhang zwischen Nullstellen des Nenners und Nullstellen des Zählers vor wie bei der Nullstelle (12). Im Falle 2 sollten die Zähler der Gleichungen (6) – (8) an den Nullstellen des Nenners von Null verschieden sein. Hier sind uns nur die Nullstellen (12) wichtig. Wir haben es dabei also dann an den Nullstellen mit der Richtung einer $u \pm a$ -Charakteristik zu tun, ohne daß deren Hodographengleichung erfüllt ist. Die Richtung $-\varphi_t/\varphi_x = u \pm a$ ist dann Richtung einer Charakteristik, aber nicht selbst Charakteristik, sondern Enveloppe von Charakteristiken. Das zeigt auch die genaue Theorie. In der Literatur sind solche Stellen als Grenzlinien oder Umkehrkanten bekannt. Tollmien hat in seiner entscheidenden Arbeit⁵ das Phänomen der Umkehrkanten entdeckt und in einer späteren⁶ alle Eigenschaften solcher Umkehrkanten festgestellt. Nach solchen grundsätzlichen Feststellungen unterschied Gudley in seiner Arbeit⁷ zwei Typen von Umkehrkanten:

Umkehrkanten, die bei geeigneter Wahl der Anfangs- und Randbedingungen im Einflußbereich dieser Anfangs- und Randbedingungen liegen, also durch sie erzwungen würden. (2a)

Umkehrkanten, die durch keine Wahl der Anfangs- und Randbedingungen im Einflußbereich dieser Anfangs- und Randbedingungen liegen können, also nicht erzwungen werden können, (2b) es sei denn, man nimmt an, die Strömung könne in sich zurückkehren, was völlig unphysikalisch ist.

Bei stationären, ebenen Strömungen wären die Umkehrkanten des Typs 2 a sogenannte Umkehrkanten mit Kompression; die Umkehrkanten des Typs 2 b wären solche mit Expansion.

Im eindimensionalen, instationären Fall sind diese Zusammenhänge grundsätzlich genau dieselben. Auch dort gibt es die Fälle 2 a und 2 b, wie Gunderley am Ende seiner Arbeit⁸ gezeigt hat. Da dieser Fall für uns wichtig ist, wollen wir kurz für je einen Prototyp der Fälle 2 a und 2 b den Verlauf der Charakteristiken, Umkehrkanten usw. in zwei Bildern angeben und daran die Aussagen (2 a) und (2 b) studieren.

Die Abb. 1 und 2 stellen die (x, t) -Ebene dar. Die Linien U sind die Umkehrkanten, von denen wir nach der allgemeinen Theorie wissen, daß sie Enveloppen der $u \pm a$ -Charakteristiken sein müssen. Hier ist U als Enveloppe der $(u + a)$ -Charakteristiken gewählt. Alle Größen des oberen Blattes der (x, t) -Ebene tragen gewöhnliche Bezeichnungen, alle Größen des unteren Blattes, das längs U an das obere Blatt gehetet ist, tragen Bezeichnungen mit einem Querstrich.

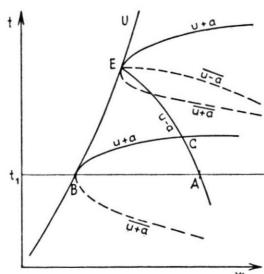


Abb. 1.

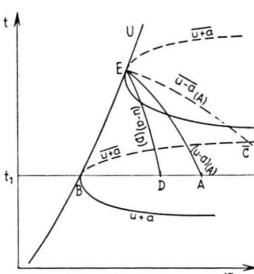


Abb. 2.

Abb. 1. Verlauf der $u+a$ - bzw. $u-a$ -Charakteristiken im Fall der Umkehrkanten, die nicht durch Anfangs- oder Randbedingungen zu erzwingen sind (Fall 2b). Längs U sind zwei Blätter der (x, t) -Ebene aneinander gehetet. Die ausgezogenen Linien sind Charakteristiken im oberen Blatt, die gestrichelten solche im unteren Blatt.

Abb. 2. Verlauf der $u+a$ - bzw. $u-a$ -Charakteristiken im Fall der Umkehrkanten, die durch Anfangs- oder Randbedingungen zu erzwingen sind (Fall 2a). Der Schnittpunkt der von B bzw. A ausgehenden Charakteristiken liegt im unteren Blatt. Bei solchem Charakteristikenverlauf stellt sich ein Stoß vor die Umkehrkanten, um diese zu verhindern.

Im Fall 2 b bestimmt die Anfangsverteilung A, B das Einflußgebiet A, B, C. Der Punkt C und mit ihm das ganze Einflußgebiet liegt im oberen Blatt; es tritt keine durch die Anfangsverteilung hervorgerufene Mehrdeutigkeit auf. Dieser Umstand findet darin seinen Ausdruck, daß die Umkehrkante U außerhalb des Einflußbereiches A, B, C liegt. Im Falle 2 a liegt nur das Einflußgebiet A, D, E der Anfangsverteilung A, D im oberen Blatt; der Punkt C, der das Einflußgebiet der Anfangsverteilung A, B abschließt, liegt bereits im unteren Blatt, weshalb er als \bar{C} geschrieben werden muß. Hier wird die Mehrdeutigkeit erzwungen, und so liegt auch die Umkehrkante U im Einflußbereich der Anfangsverteilung A, B. Die Verhältnisse werden noch deutlicher, wenn wir einmal fragen, ob die Verteilung A, B, die ja als Verteilung zur Zeit $t = t_1$ verstanden wird, nicht nur Anfangs-, sondern auch selbst Strömungsverteilung sein kann. Sie müßte dann ihrerseits von einer Anfangsverteilung herstammen, die zu einer Zeit $t_0 < t_1$ galt. Dann finden wir im Fall 2 b, daß die in den Punkt B laufende $u+a$ -Charakteristik dem unteren Blatt angehört, im Falle 2 a dagegen ist die in den Punkt B laufende $u+a$ -Charakteristik dem oberen Blatt zugehörig. Der Fall 2 b kann also nicht aus einer Anfangsverteilung entstanden sein, führt aber weiter, wenn man ihn als Anfangsverteilung auffaßt. Im Falle 2 a ändert nun die Natur die Grundgleichungen (A 1) – (A 4) ab, um die Mehrdeutigkeit zu verhindern; es baut sich ein Verdichtungsstoß auf, was einer Berücksichtigung der Wärmeleitungs- und Reibungsglieder entspricht. Den Fall 2 b gibt es als Strömungsverteilung nicht, da er durch keine Anfangsverteilung hervorgerufen werden kann.

Nach diesen Überlegungen, die an die Nullstellen des Nenners in (6) – (8) angeschlossen hatten, findet sich leicht der Anschluß an die Stabilitätsüberlegungen für unsere Lösung $n = n_0$.

II. Die nicht homologe Nachbarschaft der Homologie-Lösung $n = n_0$ und der Ausdruck für die Stabilität dieser Lösung

Wenn wir der uns eingangs gestellten Aufgabe gerecht werden sollen und prüfen wollen, inwieweit sich selbst überlassene Stoßwellen mehr und mehr unserer Homologie-Lösung $n = n_0$ ähnlich werden, so können wir das nicht leisten, wenn wir bei den

⁸ G. Gunderley, Luftfahrt-Forschg. 19, 302 [1942].

Grundgleichungen der Homologie-Lösungen stehen bleiben. Diese enthalten ja nur die der interessierenden Homologie-Lösung $n = n_0$ benachbarten Homologie-Lösungen und mit ihnen haben wir uns in der voranstehenden Arbeit beschäftigt und sahen, daß keine von ihnen als sich selbst überlassene Stoßwelle interpretiert werden kann. Vielmehr müssen wir auf die ganz allgemeinen Anfangsgleichungen (A 1) bis (A 4) zurückgehen. Würden wir dabei aber die Form (A 1) – (A 4) beibehalten, so würden die Homologie-Lösungen ihrer analytischen Form nach in keiner Weise ausgezeichnet. Wir werden daher versuchen, die Gln. (A 1) – (A 4) so zu schreiben, daß sie noch die volle Allgemeinheit besitzen, aber die Homologie-Lösungen in dieser Schreibweise sich von den allgemeinen Lösungen so unterscheiden, wie in der Schreibweise (A 1) – (A 4) die rein stationären Lösungen von den instationären. Bei stationären Lösungen kann man nämlich einfach die zeitlichen Ableitungen Null setzen und erhält ein der analytischen Form nach erheblich einfacheres Gleichungssystem. Zu diesem Zweck müssen wir den Homologie-Ansatz verallgemeinern. Der Ansatz z. B. für die Geschwindigkeit lautete

$$u = n x/t \cdot v(\xi); \quad \xi = \xi_F \text{ war Lebenslinie der Front.}$$

Mit diesem Ansatz konnten wir deswegen so gut Stoßwellen beschreiben, weil der Vorfaktor $n x/t$ die Frontgeschwindigkeit darstellt und somit die Frontbedingungen z. B. für u [s. (A 7) – (A 9)] besonders einfach in der Form

$$v_F = 2/(z+1)$$

zu erfüllen waren.

So versuchen wir zunächst folgende Verallgemeinerung:

$$u = -\varphi_t/\varphi_x \cdot v(\varphi), \quad (1)$$

$$a = -\varphi_t/\varphi_x \cdot \mu(\varphi), \quad (2)$$

$$\varrho = \varrho(\varphi), \quad \text{wo} \quad (3)$$

$$\varphi = \varphi(x, t). \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi_F \text{ soll Lebenslinie der Front sein.}$$

In den folgenden letzten Ausführungen dieser Arbeit werden wir nun solche allgemeineren Ansätze von dem Homologie-Ansatz zu unterscheiden haben. Demzufolge werden wir den Größen v, μ, ϱ den Index H (Homologie) geben, wenn wir es mit den Größen v, μ, ϱ des Homologie-Ansatzes zu tun haben werden.

Bei dem Ansatz (1) – (4) ist wieder die Frontgeschwindigkeit als Vorfaktor herausgezogen, so daß sich dieselben einfachen Randbedingungen für die Größen v, μ, ϱ ergeben wie bei den Größen v_H, μ_H, ϱ_H .

Indessen gibt ein Einsetzen in die Grundgleichung (A 1) – (A 4), daß der Ansatz (1) – (4) nur für $\varphi = \xi$ mit ihnen verträglich wäre. Es muß also v von einer zweiten Veränderlichen abhängen dürfen. So mit kommen wir zu dem Ansatz

$$u = -\varphi_t/\varphi_x \cdot v(\varphi, m(t)), \quad (1a)$$

$$a = -\varphi_t/\varphi_x \cdot \mu(\varphi, m(t)), \quad (2a)$$

$$\varrho = \varrho(\varphi, m(t)), \quad (3a)$$

$$\varphi = \varphi(x, t) \quad (\varphi = \varphi_F \text{ soll Lebenslinie der Front sein}), \quad (4a)$$

$$m = m(t). \quad (5a)$$

Grundsätzlich dürfte m auch von x abhängen, muß es aber nicht, denn irgendeine von ξ linear unabhängige Freiheit in v leistet das Erforderliche. Um nicht unnötige Freiheiten einzuführen, belassen wir es bei der bloßen t -Abhängigkeit der Funktion m .

Mit solchem Ansatz haben wir an der Front weiterhin für v, μ, ϱ dieselben Bedingungen wie für die Größen v_H, μ_H, ϱ_H .

Verlangen wir weiter, daß die Frontgeschwindigkeit

$$dx_F/dt = -\varphi_t/\varphi_x$$

die gleiche analytische Form haben soll wie bei den Homologie-Lösungen, so heißt das

$$-\varphi_t/\varphi_x = n^{n-1} \varphi. \quad (6)$$

Wollen wir aber mit (6) allgemein Frontverläufe beschreiben, so muß gelten

$$n = n(t). \quad (7)$$

Dann stellt (6) keine Einschränkung der Allgemeinheit dar und bedeutet nur, daß φ die Form haben muß

$$\varphi = x / \int_0^t n(\tau) \tau^{n(\tau)-1} d\tau. \quad (8)$$

Eben weil n nach (7) noch eine beliebige Funktion der Zeit sein kann, ist durch $\varphi = \text{const}$ noch jeder beliebige Frontverlauf zu beschreiben. Die untere Grenze im Integral des Nenners von (8) haben wir zu Null gewählt, damit für den Fall, daß $n(t)$ eine Konstante wird, die Größe φ der Größe ξ gleich wird. Wird aber nun $n(t)$ eine Konstante, so wissen

wir schon, daß $v = v_H$ nur noch von ξ abhängt und nicht mehr über $m(t)$ auch noch von der Zeit. Deshalb setzen wir

$$m(t) = n(t). \quad (9)$$

Dann erstarrt die Zeitabhängigkeit von v für $n = \text{const}$ von selbst und ist aber im Falle $dn/dt \neq 0$, wie es sein muß, vorhanden. Wir erhalten somit schließlich als Form unseres allgemeinen Ansatzes

$$u = n(t) t^{n(t)-1} \varphi v(\varphi, n(t)), \quad (1b)$$

$$a = n(t) t^{n(t)-1} \varphi \mu(\varphi, n(t)), \quad (2b)$$

$$\varrho = \varrho(\varphi, n(t)), \quad (3b)$$

$$\varphi = x / \int_0^t n(\tau) t^{n(\tau)-1} d\tau \quad (\varphi = \varphi_F \text{ soll Lebenslinie der Front sein}). \quad (4b)$$

Formell sind also φ und n die unabhängigen Veränderlichen. t stellt man sich durch den vorgegebe-

nen Zusammenhang $n(t)$ als $t(n)$ vor, so daß wirklich nur noch φ und n vorkommen. Im Homologie-Fall entartet zwar dieser Zusammenhang, aber durch Gl. (9) hatten wir ja absichtlich diese Entartung eingebaut.

Es sei noch einmal betont: Da $n(t)$ eine beliebige Funktion ist, ist der Ansatz (1b) – (4b) noch völlig allgemein und bringt keinerlei Einschränkung der Allgemeinheit mit sich. Für $n = \text{const}$ fallen wir auf den Ansatz (A 18) – (A 21) zurück. Die Vorgabe einer bestimmten Funktion $n(t)$ entspricht der Vorgabe eines bestimmten Frontverlaufes, was im Sinne einer mathematischen Aufgabenstellung natürlich immer möglich ist. Die Lösung ist dann durch die Frontbedingungen (A 7) – (A 9) innerhalb des Einflußbereiches der Front bestimmt. Soll die Lösung auch außerhalb der Front bestimmt sein, müssen zusätzlich Anfangsbedingungen gegeben sein.

Mit den Gln. (1b) – (4b) geht (A 1) – (A 4) über in

$$\frac{\partial v}{\partial \ln \varphi} + \frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln \varphi} (v - 1) + v(1 + \alpha) = - \frac{\partial \ln \varrho}{\partial n} \beta(t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \ln \varphi} \alpha(v - 1) + \frac{\partial \mu}{\partial \ln \varphi} 2\mu + \frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln \varphi} \mu^2 + \alpha v \left(v - \frac{1}{n} \right) + 2\mu^2 = - \alpha v \gamma(t) - \frac{\partial v}{\partial n} \alpha \beta(t), \quad (11)$$

$$2 \frac{\partial \mu}{\partial \ln \varphi} (v - 1) + \frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln \varphi} \mu (v - 1) (1 - \alpha) + 2\mu \left(v - \frac{1}{n} \right) = - 2\mu \gamma(t) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial n} \beta(t) - \mu (1 - \alpha) \frac{\partial \ln \varrho}{\partial n} \beta(t). \quad (12)$$

Dabei gilt

$$\beta(t) = \frac{dn}{dt} \lambda(t), \quad \gamma(t) = \frac{1}{n} - \frac{d\lambda}{dt}, \quad \lambda = \frac{F}{F'}, \quad (13), (14), (15)$$

$$F = \int_0^t n(\tau) t^{n(\tau)-1} d\tau, \quad \varphi = \frac{x}{F}. \quad (16), (17)$$

Es gelte ferner

$$-\partial \ln \varrho / \partial n \cdot \beta(t) = a, \quad (18)$$

$$-\alpha v \gamma(t) - \partial v / \partial n \cdot \alpha \beta(t) = b, \quad (19)$$

$$-2\mu \gamma(t) - 2 \frac{\partial \mu}{\partial n} \beta(t) - \mu (1 - \alpha) \frac{\partial \ln \varrho}{\partial n} \beta(t) = c. \quad (20)$$

Wir stellen fest: Für $dn/dt = 0$ werden die Größen $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ zu Null, und wir erkennen die Glei-

chungen der Homologie (A 26) wieder. Wir haben unser Ziel erreicht: So wie sich die stationären von den instationären Lösungen der Gln. (A 1) – (A 4) unterscheiden, so unterscheiden sich die homologen von den nichthomologen Lösungen der Gln. (10) bis (17). In beiden Fällen bleibt ein gewöhnliches Diff.-Gl.-System übrig. Die Gln. (10) – (17) erlauben es, auf bequeme Art und Weise die nichthomologe Nachbarschaft unserer Homologie-Lösung $n = n_0$ zu beschreiben.

So wie wir die Gln. I; (3) – (4) nach den Größen u_φ , ϱ_φ und p_φ auflösten, so lösen wir auch hier unser System (10) – (12) nach den Größen $\partial v / \partial \ln \varphi$, $\partial \mu / \partial \ln \varphi$, $\partial \ln \varrho / \partial \ln \varphi$ auf und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial \ln \varphi} = \frac{-2(v-1)\{\mu^2(\alpha v(1+\alpha)+2n')-\alpha v(v-1)(v-1/n)\}-2(v-1)\{-\mu c+(v-1)b-a\alpha\mu^2\}}{2\alpha(v-1)\{\mu^2-(v-1)^2\}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \ln \varphi} = & \frac{-\mu\{2\mu^2(\alpha(v-1)+n')+\alpha(v-1)(-(2+(\alpha-1)\alpha)v^2+(3-\alpha)/n+\alpha+1+(\alpha-1)\alpha)v-2/n)\}}{2\alpha(v-1)\{\mu^2-(v-1)^2\}} \\ & + \frac{\alpha\mu(v-1)^2(1-\alpha)(v-1)ab-(\alpha(v-1)^2-\mu^2)c}{2\alpha(v-1)\{\mu^2-(v-1)^2\}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln \varphi} = \frac{4\mu^2n'+2\alpha v(v-1)\{\alpha(v-1)-n'\}-2a(v-1)^2\alpha+2b(v-1)-2\mu c}{2\alpha(v-1)\{\mu^2-(v-1)^2\}}. \quad (23)$$

Wir vergleichen die Nenner von (21) – (23) mit dem Nenner I; (9) und stellen fest: Ist $\nu = 1$, so haben wir es mit einer Teilchenbahn zu tun, ist $\mu + \nu = 1$, so haben wir es mit einer $u + a$ -Charakteristik zu tun, und ist $-\mu + \nu = 1$, so haben wir es mit einer $u - a$ -Charakteristik zu tun, die an der betreffenden Stelle mit einer Koordinatenlinie $\varphi = \text{const}$ zusammenfällt. Diese Aussage gewinnen wir natürlich ebensogut aus den Gln. (1b) – (4b) direkt. Verfolgen wir den Fall der charakteristischen Richtung $u + a$ weiter, die die Linie $\varphi = \text{const}$ tangiert, so finden wir, daß

$$\mu + \nu = 1 \quad (24)$$

wegen $\mu = \mu(\varphi, n(t))$ und $\nu = \nu(\varphi, n(t))$ im allgemeinen einen Zusammenhang

$$\varphi = \varphi(n(t)) \quad (25)$$

liefert, der besagt, daß die von der $u + a$ -Richtung tangierte Stelle mit der Zeit auswandert, solange $dn/dt \neq 0$ ist. Ist die hypothetisch von den Gln. (21) bis (23) beschriebene Störung regulär, entspricht sie also dem Fall 1 des Abschnittes I, so gilt die zu (24) gehörige Hodographengleichung, die an der Stelle (24) bzw. (25) alle Zähler in (21) – (23) zu Null macht:

$$\mathfrak{R} - \beta(t) s - \gamma(t) (\nu(z-2) + 2) = 0. \quad (26)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwandt

$$\mathfrak{R} = z \alpha \nu^2 - \nu((z-2) n' + z \alpha) - 2 n', \quad (27)$$

$$s = \left\{ -(\nu-1) \frac{\partial \ln \varphi}{\partial n} + z \frac{\partial \nu}{\partial n} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial n} \right\}. \quad (28)$$

Bis hierher waren unsere Überlegungen ganz allgemein gültig und erst jetzt schränken wir die Allgemeinheit ein, wenn wir auf Homologie-Lösungen bzw. auf die Nachbarschaft zur Lösung $n = n_0$ zu sprechen kommen. Zunächst zu den Homologie-Lösungen selbst:

Bei Homologie-Lösungen ist $dn/dt = 0$. Damit verschwinden die Größen $\beta(t)$ und $\gamma(t)$ und mit ihnen wegen (18) – (20) auch die Größen a, b, c . Die Gln. (21) – (23) stellen dann die Gleichungen der Homologie dar. Ist dieser Zusammenhang $\mu(\nu)$ der Gl. (24) fähig, so folgt aus (25) wegen $\varphi_{(dn/dt=0)} = \xi$, daß dort ξ den konstanten Wert ξ_0 hat. Soll die zugehörige Homologie-Lösung dem Fall 1 entsprechen, so bedeutet das wegen (26)

$$\mathfrak{R} = 0. \quad (29)$$

(29) ist aber zusammen mit (24) die Gleichung für

den Punkt $P_{2,3}$ bzw. die Punkte P_2 und P_3 des Richtungsfeldes aus der vorangehenden Arbeit¹. Mit dieser Tatsache haben wir uns bereits dort auseinandergesetzt.

Wir sahen weiter, daß nur die Homologie-Lösung $n = n_0$ dem Fall 1 zugeordnet werden kann. Homologie-Lösungen der Klasse I ($0 < n < n_0$) entsprechen dem Fall 2. Um auch zwischen den Fällen 2a und 2b zu unterscheiden, stellen wir mit Guderley fest: Lösungen, die aus dem Gebiete $\mu^2 > (\nu-1)^2$ kommen und ins Gebiet $\mu^2 < (\nu-1)^2$ gehen, sind Lösungen des Typs 2b; kommen sie aus dem Gebiet $\mu^2 < (\nu-1)^2$ und gehen sie weiter in das Gebiet $\mu^2 > (\nu-1)^2$, so gehören sie zum Fall 2a, zeigen also, wie wir ja wissen, einen Stoß an. Man sieht das auch sehr gut, wenn man untersucht, was für Punkte des (μ, ν) -Diagramms durch die allgemeinen (nicht notwendig starken) Frontbedingungen verbunden werden können. Dabei stellt es sich heraus, daß nur ein Punkt des Gebietes $\mu^2 < (\nu-1)^2$ als Zustand vor dem Stoß betrachtet werden kann, nach dem Stoß hat man es notwendig mit einem Punkt des Gebietes $\mu^2 > (\nu-1)^2$ zu tun, ganz so, wie wir es aus der Fallunterscheidung 2a und 2b schließen müssen.

Auf dem Umweg über Gl. (25) versteht man es nun auch leicht, wie bei der Klasse I ($0 < n < n_0$), die also dem Fall 2b entspricht, die Umkehrkanten zustande kommen. Unerlaubterweise ist dort

$$dn/dt = 0,$$

so daß alle $u + a$ -Charakteristiken dieselbe Linie $\varphi = \text{const}$ tangieren; das heißt aber, an ihr umkehren. Wäre $dn/dt \neq 0$, so könnte diese Stelle auswandern, so aber laufen sich die $u + a$ -Charakteristiken fest und bilden eine Umkehrkante des Falles 2b. Denselben Sachverhalt können wir auch anders aussprechen: Die Umkehrkante des Falles 2b kommt formell deswegen zustande, weil wir der analytischen Fortsetzung über die letztbestimmte $u + a$ -Charakteristik hinweg willkürlich die Bedingung auferlegen, vom Homologie-Typus zu sein. Homologie-Lösungen der Klasse II ($n_0 < n < 1$) sind durch Zusammenhänge $\mu(\nu)$ charakterisiert, die der Gl. (24) fähig sind.

Soweit wollen wir die Überlegungen führen, die wir bei der Spezialisierung von (21) – (23) auf die eigentlichen Homologie-Lösungen anstellen.

Nun kommen wir auf die nicht homologe Nachbarschaft der Lösung $n = n_0$ zu sprechen. Eine Lösung, die dieser Nachbarschaft angehört, heiße im

folgenden N-Lösung (Nachbarschaftslösung). Die Homologie-Lösung $n = n_0$ nennen wir n_0 -Lösung. Von der n_0 -Lösung wissen wir, daß für sie an der Front gilt

$$\mu_H^2(\text{FRONT}) > (\nu_H - 1)^2(\text{FRONT}), \quad (30)$$

weit hinten für große Werte von x gilt

$$\mu_H^2(x, \xi \rightarrow -\infty) < (\nu_H - 1)^2(x, \xi \rightarrow -\infty). \quad (31)$$

Den nach (30) und (31) notwendigen Nulldurchgang (24) erlebt die n_0 -Lösung in $P_{2,3}$. Die Ungleichung (30) erfüllt jede Lösung, also auch unsere N-Lösung, weil für die Größen ν, μ, ϱ dieselben Frontbedingungen gelten wie für die Größen ν_H, μ_H, ϱ_H . Zur Ungleichung (31) machen wir folgende Voraussetzung:

Voraussetzung A: Von den Lösungen der nicht homologen Nachbarschaft zur Lösung $n = n_0$ (32) seien bei unseren Überlegungen nur solche betrachtet, die die Ungleichung (31) erfüllen.

A ist eine sehr weitherzige Voraussetzung, weil $n(t)$ sehr pathologische Eigenschaften haben muß, damit für eine N-Lösung (31) nicht erfüllt ist. Dann wird aber für eine N-Lösung die für uns fundamentale Gleichung [siehe (A 36)]

$$\mu^2 = (\nu - 1)^2$$

notwendig. Dazu machen wir die Voraussetzung B.

Voraussetzung B: Von den Lösungen der nicht homologen Nachbarschaft zur Lösung $n = n_0$ seien bei unseren Überlegungen nur solche (33) betrachtet, die nicht im Begriffe sind, hinter der in Rede stehenden Stoßfront eine zweite Stoßfront aufzubauen.

In der Tat mußten Hain und v. Hoerner bei ihrer auf rein numerischem Wege gefundenen Stabilität der n_0 -Lösung solche Anfangsverteilungen ausschließen, die hinter der ursprünglichen Stoßfront zu einer neuen Stoßfront führten. Mit der Voraussetzung B ordnen wir die N-Lösungen dem Fall I des Abschnittes I zu. Damit verlangen wir für unsere N-Lösung an den Stellen (24) die Gl. (26). Aus (25) wissen wir, daß der φ -Wert bei N-Lösungen noch auswandert, (26) ist also für ein gewisses Intervall von φ -Werten und nicht nur für einen einzelnen φ -Wert zu fordern. Unser Ziel ist es, durch Gl. (26) etwas über die Größe dn/dt auszusagen. N-Lösungen werden stabil sein, wenn $dn/dt > 0$ für $n(t) < n_0$ und $dn/dt < 0$ für $n(t) > n_0$

ist. Um zu solchen Vorzeichenaussagen zu kommen, müssen wir aber etwas über das Vorzeichen der Größe s wissen, die in (26) auftritt und in (28) definiert ist. Dazu betrachten wir noch einmal das Gleichungssystem (10) – (12). Die Größe n kommt dort auf beiden Seiten vor; auf der linken Seite, die für die Homologie-Lösungen typisch ist, explizit in (11) und (12), und auf der rechten Seite, die die Abweichung von der Homologie kennzeichnet, implizit in den Termen $\partial/\partial n, \gamma(t), \beta(t)$. Sind die rechten Seiten hinreichend klein, was für hinreichend kleine Werte von dn/dt der Fall ist, so wird in der funktionalen Abhängigkeit der Größen ν, μ und ϱ die Wirksamkeit des explizit auftretenden n der linken Seite überwiegen, so daß gelten wird

$$\frac{\partial \nu}{\partial n} \approx \frac{\partial \nu_H}{\partial n}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial n} \approx \frac{\partial \mu_H}{\partial n}, \quad \frac{\partial \ln \varrho}{\partial n} \approx \frac{\partial \ln \varrho_H}{\partial n}. \quad (34)$$

(34) wird nun nur innerhalb des Einflußbereiches der Front gelten können. Wir machen uns diesen Zusammenhang noch einmal im (μ, ν) -Diagramm klar.

In Abb. 3 sind die Integralkurven $\mu(\nu)$ in projektiver Darstellung für die Werte $n = n_0 - \varepsilon, n = n_0, n = n_0 + \varepsilon$ wiedergegeben. Nun wissen wir, daß bei $n = n_0$ der Einflußbereich der Front bis $P_{2,3}$ führt, wir werden also in der Partie I vor $P_{2,3}$ die Größen $\partial \nu_H/\partial n$ usw. bestimmen müssen, weil wir sie ja auch für ein ganzes Intervall von φ -Werten und nicht nur an einer Stelle brauchen.

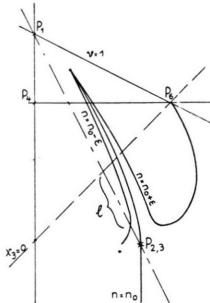


Abb. 3. Ebene des Richtungsfeldes der Guderleyschen Diff.-Gl. in projektiven Koordinaten. Gezeichnet sind die Integralkurven für $n = n_0 - \varepsilon, n = n_0$ und $n = n_0 + \varepsilon$.

Wie es auch sein muß, weichen die Lösungskurven bis zu $P_{2,3}$ hin entsprechend der kleinen Änderung in n auch nur wenig voneinander ab, erst außerhalb des Einflußbereiches laufen sie auseinander. Mit (34) verlangen wir nun nichts anderes,

als daß N-Lösungen im (μ, ν) -Diagramm innerhalb des Einflußbereiches der Front durch mit n „langsam bewegliche“ Kurven $\mu(\nu)$ aus der Umgebung der Kurve $\mu(\nu)_{n=n_0}$ dargestellt werden können. Homologie-Lösungen haben „feststehende“ Kurven $\mu(\nu)$. Tatsächlich müssen wir nicht einmal (34) verlangen, wie sich herausstellen wird, sondern es genügt, wenn die Gln. (35) gelten:

$$\begin{aligned} \text{sign } \frac{\partial \nu}{\partial n} &= \text{sign } \frac{\partial \nu_H}{\partial n}; \quad \text{sign } \frac{\partial \mu}{\partial n} = \text{sign } \frac{\partial \mu_H}{\partial n}; \\ \text{sign } \frac{\partial \ln \varrho}{\partial n} &= \text{sign } \frac{\partial \ln \varrho_H}{\partial n}. \end{aligned} \quad (35)$$

Nur auf die Vorzeichen kommt es an!

Da aber die Gln. (35) nicht allgemein und zwingend behauptet werden können, müssen wir die Voraussetzung C machen. Indessen kann man sich kaum physikalische Verhältnisse vorstellen, bei denen das Vorzeichen der Größen der Gln. (34) springt, wenn $n(t)$ konstant wird. Jedoch soll gelten:

Voraussetzung C: Von den Lösungen der nicht homologen Nachbarschaft zur Lösung $n=n_0$ seien bei unseren Überlegungen nur solche betrachtet, die ein so gleichmäßiges Verhalten (36) zeigen, daß die Vorzeichen der Größen $\partial \nu / \partial n$, $\partial \mu / \partial n$, $\partial \ln \varrho / \partial n$ mit den Vorzeichen der Größen $\partial \nu_H / \partial n$, $\partial \mu_H / \partial n$, $\partial \ln \varrho_H / \partial n$ übereinstimmen.

Um die Größen aus den rechten Seiten der Gln. (35) zu bestimmen, wurden die Verteilungen für $n=n_0-\varepsilon$ und $n=n_0+\varepsilon$ numerisch integriert und daraus die Größen $\partial \nu_H / \partial n$, $\partial \mu_H / \partial n$, $\partial \ln \varrho_H / \partial n$ gebildet. Es ergab sich

$$\frac{\partial \ln \varrho_H}{\partial n} > 0; \quad \frac{\partial \nu_H}{\partial n} < 0; \quad \frac{\partial \mu_H}{\partial n} < 0 \quad (37)$$

längs der Partie I in Abb. 3.

Die sonst in der Gl. (36) auftretenden Größen setzen wir ihren Vorzeichen nach den Homologie-Größen in der Nachbarschaft von $P_{2,3}$ gleich, was deshalb ungefährlich ist, weil diese Größen in der weiteren Nachbarschaft von $P_{2,3}$ keine Nullstellen haben, an denen sie ihr Vorzeichen wechseln könnten.

Nach (28) setzt sich s aus drei Termen zusammen. Alle drei haben gleiches Vorzeichen, so daß in der Vorzeichenbestimmung von s keine Konkurrenz unter den drei Termen auftritt, die es nötig machte, auch noch die Absolutbeträge festzustellen. Alle drei Terme wirken in der gleichen Richtung. Wäre das nicht der Fall, so hätten wir nicht nur (35), son-

dern die weitergehende Forderung (34) stellen müssen. Daß das nicht nötig ist, stützt das Schlußverfahren. Es gilt mit (37)

$$-(\nu - 1) \frac{\partial \ln \varrho_H}{\partial n} < 0, \quad \varkappa \frac{\partial \nu_H}{\partial n} < 0, \quad 2 \frac{\partial \mu_H}{\partial n} < 0.$$

Also gilt $s < 0$. (38)

Aus (26) folgt unter Berücksichtigung von (13) und (14)

$$\frac{dn}{dt} = \frac{-(\partial \nu / \partial n)(2 - \varkappa)(n - n_0)}{s} \frac{(d\lambda / dt) - 1}{\lambda} = \vartheta(n - n_0). \quad (39)$$

Bei der Herleitung der Gl. (39) machten wir wesentlich davon Gebrauch, daß in (27) $\alpha = 0$ gesetzt werden mußte. Also nur im ebenen Fall hat das Stabilitätskriterium die durchsichtige Form (39). Es ist nach (37) und (38)

$$-(\partial \nu / \partial n)(2 - \varkappa)/s < 0. \quad (40)$$

Um das Vorzeichen von $(d\lambda / dt - 1) / \lambda$ zu bestimmen, machen wir von (15), (16) und (40) Gebrauch. (4a) gibt uns die Möglichkeit, die Größe $n \cdot t^{n-1}$ durch v_F auszudrücken. Es ergibt sich

$$(d\lambda / dt - 1) / \lambda = -1/v_F \cdot dv_F / dt.$$

Nun ist aber $1/v_F \cdot dv_F / dt < 0$, denn die ganze Arbeit hindurch handelt es sich ja nur um langsame werdende Stoßfronten. Also gilt:

$$(d\lambda / dt - 1) / \lambda > 0, \quad (41)$$

(39), (40), (41) liefern das Ergebnis:

$$dn / dt = \vartheta(n - n_0); \quad \vartheta < 0. \quad (42)$$

Wir fassen (42) in Worte:

Eine nicht homologe Lösung aus der Nachbarschaft der Homologie-Lösung $n=n_0$, auf die die Voraussetzung A [s. (32)], die Voraussetzung B [s. (33)] und die Voraussetzung C [s. (36)] zutreffen, geht mit wachsender Zeit mehr und mehr gegen die Homologie-Lösung $n=n_0$. Mindestens in diesem Sinne ist also die Homologie-Lösung $n=n_0$ stabil.

Betrachten wir jetzt noch einmal die Homologie-Lösung $n=n_0-\varepsilon$, so sehen wir, daß ihre Umkehrkanten des Falles 2b durch Hinzunahme kleiner nicht homologer Glieder behoben werden können. Wir werden somit der Lösung $n=n_0-\varepsilon$ die physikalische Bedeutung zusprechen, die genäherte Darstellung einer N-Lösung zu sein, sofern wir uns dabei auf den Einflußbereich der Front beschränken, der sich bis kurz vor ihre Umkehrkante erstreckt.

Betrachten wir die Lösung $n = n_0 + \varepsilon$, so ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder wir stellen eine Randbedingung, wie sie etwa durch die unendlich große Temperatur für einen x -Wert, der einem festen ξ -Wert entspricht, beim Einlauf nach P_6 dargestellt wird. Dann kann ε gegebenenfalls konstant sein, und die Lösung ist auch über die Umgebung von $P_{2,3}$ hinaus im Homologie-Diagramm als durchgehende Kurve darstellbar, – oder wir haben die zweite Möglichkeit, nämlich die, eine Randbedingung zu stellen, wie sie sich in (31) ausdrückt, d. h. wir fordern freies Abströmen nach hinten. Dann kann ε nicht konstant sein, und die Lösung $n = n_0 + \varepsilon$ hat bei dieser zweiten Möglichkeit ebenfalls die Bedeutung, die genäherte momentane Darstellung einer N-Lösung zu sein, sofern wir uns auch hier auf den Einflußbereich der Front beschränken, der sich bis in die Umgebung des Punktes $P_{2,3}$ erstreckt.

III. Die Laval-Düse

Die Überlegungen des Abschnittes I, die schließlich zum Stabilitätsausdruck II, (42) geführt hatten, waren ganz allgemeiner Natur. Bei der Aufstellung des Ansatzes II, (1b) bis (4b) hatten wir uns von der Analogie zwischen stationären und homologen Strömungstypen leiten lassen, und so wollen wir auch die spezielleren Überlegungen, die zu II, (42) geführt hatten, auf ein Problem der eindimensionalen stationären Gasdynamik, nämlich die Strömung in einer Laval-Düse, anwenden. Auch dort gibt es nur eine einzige ausgezeichnete Integralkurve, die den Übergang von Unter- zu Überschallgeschwindigkeit vermittelt. Wenn wir nach deren Stabilität fragen, so fragen wir, ob Strömungen, die beim Aufbau der Laval-Düsen-Strömung auftreten und noch nicht stationär sind, mit wachsender Zeit gegen die eine ausgezeichnete, stationäre Lösung gehen. Bei der Laval-Düsen-Strömung handelt es sich um die eindimensional behandelte Strömung durch eine Düse, die eine Verengung aufweist (s. Abb. 4). Die somit in Erscheinung tretende Berandung bedingt eine formale Änderung der Kontinuitätsgleichung I, (5), deren Ursprung man am besten in der unmittelbar einsichtigen Form (1) der Kontinuitätsgleichung erkennt.

Gl.(1) lautet:

$$f(\partial \varrho / \partial t) + (\partial \varrho / \partial x) \varrho u f = 0 ; \quad (1)$$

f bedeutet dabei den Querschnitt der Laval-Düse an der Stelle x . Nun schreiben wir die Kontinuitätsgleichung, Impulsgleichung und den Energiesatz wieder so, daß wir sie als Gleichungssystem für die ϱ_x , u_x , p_x auffassen und erhalten

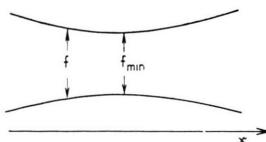


Abb. 4. Profil der betrachteten Düse (Laval-Düse).

$$\varrho_x \cdot u + u_x \cdot \varrho + p_x \cdot 0 = -\varrho u (\ln f/dx) - \varphi_t , \quad (2)$$

$$\varrho_x \cdot 0 + u_x \cdot u + p_x \cdot 1/\varrho = -u_t , \quad (3)$$

$$\varrho_x \cdot (-a^2 u) + u_x \cdot 0 + p_x \cdot u = -p_t + a^2 \varphi_t . \quad (4)$$

Auflösung nach u_x , p_x , ϱ_x ergibt

$$\varrho_x = \frac{-(\ln f/dx) \varrho u^3 - \varphi_t (u^2 - a^2) + u_t \varrho u - p_t}{u(u^2 - a^2)} , \quad (5)$$

$$u_x = \frac{(\ln f/dx) a^2 u^2 - u_t u^2 + p_t u / \varrho}{u(u^2 - a^2)} , \quad (6)$$

$$p_x = \frac{-(\ln f/dx) \varrho u^3 a^2 + u_t \varrho a^2 u - p_t u^2}{u(u^2 - a^2)} . \quad (7)$$

Wir erkennen sofort die Gl. I, (6) – (8) wieder, wenn wir uns klar machen, daß hier gilt:

$$\varphi = x ; \quad -\varphi_t / \varrho_x = 0 \quad \text{und statt des Terms } \alpha \varrho u / x \text{ tritt der Term } (\ln f/dx) \varrho u \text{ auf.}$$

Die charakteristische Richtung, an die sich unsere Betrachtungen anknüpfen, heißt hier

$$dx/dt = 0 , \quad (8)$$

so daß die interessierenden Nullstellen des Nenners dem Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit entsprechen. An den Stellen $u = a$ gilt die eine alle drei Zähler zu Null machende Hodographengleichung

$$(\ln f/dx) \varrho u^3 - u_t \varrho u + p_t = 0 . \quad (9)$$

Gl.(9) entspricht völlig der Gl. II,(26). Der Term

$$(\ln f/dx) \varrho u^3$$

entspricht dem Term, der in II,(26) mit \mathfrak{R} bezeichnet worden war. So wie neben \mathfrak{R} nur noch nicht homologe Glieder auftraten, so treten in (9) neben dem Term $(\ln f/dx) \varrho u^3$ nur noch instationäre Glieder auf. Bei der Anwendung der Gl. II, (26) mußten wir wesentlich von dem Homologie-Diagramm Gebrauch machen, hier müssen wir die rein stationären Verhältnisse studieren. Diese sind allgemein bekannt und in jedem Lehrbuch nachzulesen, so z. B. bei O s w a t i t s c h⁹. Im stationären Fall kann man natürlich (5) – (6) geschlossen integrieren. Man erhält:

$$\varrho u f = M , \quad (10)$$

$$u^2/2 + a^2/(\gamma - 1) = u_m^2/2 , \quad (11)$$

$$p = p_0 (\varrho / \varrho_0)^\gamma ; \quad (12)$$

u_m ist die durch den Kesseldruck und die Kesseldichte bestimmte maximale Entweichungsgeschwindigkeit; p_0 und ϱ_0 seien der Kesseldruck und die Kesseldichte, M soll die Durchsatzmenge darstellen. Man kann diese integrale Gleichung einfacher fassen durch Einführung der dimensionslosen Größen y und m . Mit

$$y = u/u_m ; \quad m = M/\varrho_0 u_m \quad (13)$$

ergibt sich

$$m = f y (1 - y^2)^{1/(\gamma - 1)} . \quad (14)$$

⁹ K. O s w a t i t s c h , Gasdynamik, Springer-Verlag, Wien 1952.

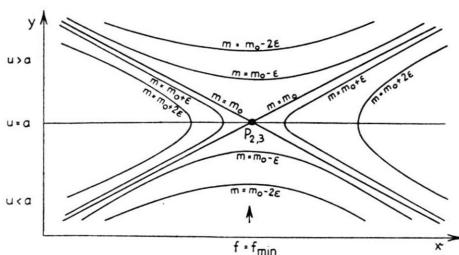


Abb. 5. Mögliche Geschwindigkeitsverteilungen in einer Laval-Düse bei stationärem Betrieb.

Gl.(14) enthält als charakteristischen Parameter die Größe m , so wie die Homologie-Größen die Größe n enthielten. Gl. (14) bedingt die in Abb. 5 dargestellte Verteilung $y(x)$.

Wir erhalten für die verschiedenen m -Werte die verschiedensten Zusammenhänge $y(x)$. Für $m < m_0$ bleiben wir ganz im Unter- bzw. Überschallgebiet. Für $m = m_0$ findet der Übertritt statt, und bei $m > m_0$ staut sich die Strömung vor dem engsten Querschnitt so sehr, daß Umkehrkanten zu stehen kommen. Kommen wir dabei aus dem Unterschallgebiet — und so wollen wir ja unsere Düsenströmung verstehen —, so sind es Umkehrkanten mit Expansion, also gehören sie zum Fall 2b, auf dem wir die Regularisierung durch die instationären Zeitglieder (9) anwenden müssen. Bei den Homologie-Lösungen ging die Lösung $n = n_0$ durch den Sattelpunkt $P_{2,3}$, hier führt die Strömung $m = m_0$ durch den Sattelpunkt der Abb. 5, der deshalb auch hier $P_{2,3}$ heißen soll. Bei den Homologie-Lösungen mußten wir die Lösungen $n < n_0$ wegen ihrer Umkehrkanten des Typs 2b als reine Homologie-Lösungen völlig verwerfen, hier müssen wir das Gleiche mit den Lösungen $m > m_0$ tun. Bei den Homologie-Lösungen waren die Lösungen $n > n_0$ auszuschließen, weil sie auf eine verkehrte Randbedingung führten, hier tun es die Lösungen $m < m_0$. Sie verbleiben z. B. im Unterschallgebiet und bedingen am Düsenende einen hohen Außendruck. Den wollen wir aber nicht vorgeben, und so verwerfen wir ebenfalls die Lösungen $m < m_0$, und damit bleibt als rein stationäre Lösung, die den Übergang von Unter- zu Überschallgeschwindigkeit vermittelt, die Lösung $m = m_0$ übrig. Bei den Homologie-Lösungen stellt der Punkt $P_{2,3}$ die letztbestimmte $u+a$ -Charakteristik dar, hier begrenzt die durch den Punkt $P_{2,3}$ als $x=\text{const}$ [man beachte (10)] gehende $u-a$ -Charakteristik das Einflußgebiet, das durch die Anfangsbedingungen im Kessel beherrscht wird.

Diese Parallelisierung könnten wir nun auch noch bei der Behandlung der Gl.(9) fortsetzen. Um nicht zu langatmig zu werden, stellen wir an dieser Stelle fest, daß wir bei den folgenden Schlüssen die den Voraussetzungen A, B, C [II, (32), (33), (36)] entsprechenden Voraussetzungen hier ebenfalls zu fordern haben.

Somit fassen wir uns bei der Behandlung der Gl.(9) kurz. Die Zeitableitungen $\partial/\partial t$ ersetzen wir durch die Ableitungen $(\partial/\partial m) \cdot (dm/dt)$, wenn wir m als $m(t)$ auffassen, so wie wir bei den Homologie-Lösungen n als $n(t)$ aufgefaßt haben. Mit den Gl.(11) und (12) folgt aus (9)

$$x \cdot u_t/u^2 - d \ln f/dx = 0 \quad (15)$$

und somit

$$\frac{dm}{dt} = \frac{u^2}{x} \frac{d \ln f}{dx} \cdot \frac{1}{(\partial u / \partial m)_{x=\text{const}}} ; \quad (16)$$

u^2/x ist größer als Null. Ist $m > m_0$, so haben wir es mit dem Fall der Umkehrkanten zu tun. Dort ist an der Nullstelle des Nenners, also an der Stelle $u=a$, $d \ln f/dx$ kleiner als Null. $\partial u / \partial m$ ist im Einflußbereich der Kesselanfangsbedingungen größer als Null. Nur dort dürfen wir es aus der Abb. 5 entnehmen, denn nur dort sind Lösungen mit nachbarschaftlichem m auch wirklich benachbart. Ist $m < m_0$, so bleibt die Lösung unter der Lösung $m = m_0$, muß also den nach der zu II,(32) analogen Voraussetzung A geforderten Null-durchgang des Nenners von (5)–(7) bei Werten von $d \ln f/dx$, die größer als Null sind, erleben. Es gilt also

$$\frac{u^2}{x} > 0 ; \quad \frac{\partial u}{\partial m} > 0 ; \quad \frac{d \ln f}{dx} < 0 \text{ für } m > m_0 , \quad \frac{d \ln f}{dx} > 0 \text{ für } m < m_0 . \quad (17)$$

Mit diesen Ungleichungen gehen wir in (16) ein und erhalten

$$dm/dt \leq 0, \text{ falls } m \geq m_0 . \quad (18)$$

Also mindestens in diesem durch die zu den Voraussetzungen A, B, C [II, (32), (33), (36)] entsprechenden Voraussetzungen eingeengten Sinne ist die Lösung $m = m_0$ in dem von uns oben erklärten Sinn stabil.

Tatsächlich ist diese Stabilität experimentell gut bestätigt. Die Behandlung des Anlaßvorganges der Laval-Düse bringt keine neuen Erkenntnisse. Sie wurde auch nur angestellt, um die Richtigkeit und im Grunde Einfachheit der hier angewandten Schlußweise zu zeigen.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. v. Weizsäcker herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Hinweise und Diskussionen, die häufig auch auf den Arbeitskreis um Prof. v. Weizsäcker erweitert wurden.

NOTIZEN

Selbstdiffusion in Oxydsystemen

Von R. Lindner

Abt. Kristallkinetik, Institut für Silikatchemie
der Chalmers Technischen Hochschule, Göteborg
(Z. Naturforschg. **10a**, 1027–1028 [1955]; eingeg. am 5. September 1955)

Am hiesigen Institut (Dir.: Prof. J. A. Hedvall) werden mit Unterstützung des Schwedischen Technischen For-

schungsrates Untersuchungen des Mechanismus von Festkörperreaktionen unter Verwendung radioaktiver Indikatorisotope durchgeführt. Die Resultate sind seit 1949, hauptsächlich in schwedischen Zeitschriften, veröffentlicht worden.

Einen Hauptteil der Untersuchungen bildete die Messung der Kationenselbstdiffusion in Oxydsystemen. Eine Zusammenfassung der Meßergebnisse ist vor einiger Zeit in englischer Sprache gegeben worden¹. Die hinzugekommenen

¹ R. Lindner, J. Chem. Phys. **23**, 410 [1955].